Tweede college complexiteit

5 februari 2008

Wiskundige achtergrond

- $\lfloor x \rfloor$ = het grootste gehele getal $\leq x$

  $\lceil x \rceil$ = het kleinste gehele getal $\geq x$

  Er geldt: $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ en $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$ voor elk geheel getal $n \geq 0$

- $\log_b x = y \Longleftrightarrow b^y = x$

  Notatie: $\lg x = \log_2 x$ en $\ln x = \log_e x$

  Er geldt: $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$

- $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$

- $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{als } n \text{ even} \\ \frac{n+1}{2} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$

- $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{als } n \text{ even} \\ \frac{n-1}{2} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

- $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$

- $\sum_{i=a}^{b} q^i = \frac{q^a - q^{b+1}}{1-q}$ voor $q \neq 1$

- $\sum_{i=0}^{k-1} (i+1)2^i = (k-1)2^k + 1$

$f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (meestal $\mathbb{R}^+$)

1. $f = O(g)$: er bestaan constanten c en n_0 (beide > 0) zodat $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ voor alle $n \geq n_0$: asymptotische bovengrens

2. $f = \Omega(g)$: er bestaan constanten c' en n'_0 (beide > 0) zodat $0 \leq c'g(n) \leq f(n)$ voor alle $n \geq n'_0$: asymptotische ondergrens

3. $f = \Theta(g)$: er bestaan constanten c_1, c_2 en n''_0 (alle > 0) zodat $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ voor alle $n \geq n''_0$: asymptotisch gedrag

Voor bijbehorende plaatjes: zie college.

$f = \Theta(g)$: neem uit f de hoogste orde term, negeer alle lagere orde termen en de constante die voor de hoogste orde term staat $\longrightarrow g$.

$\Theta(1)$: constant

$\Theta(\lg n)$: logaritmisch

$\Theta(n)$: lineair

$\Theta(n^k)$ met $k > 0$: polynomiaal

$\Theta(2^n)$, $\Theta(a^n)$ met $a > 1$: exponentieel

Voorbeelden

$\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

$3n^3 + 6n^2 + 9 = \Theta(n^3)$

$42n = O(n^2)$, maar NIET $42n = \Omega(n^2)$

$\log_7 n = \Theta(\lg n)$

$\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\lg n)$

$\sum_{i=1}^{n} \lg i = \Theta(n \lg n)$

$2^n = O(3^n)$, maar NIET $2^n = \Omega(3^n)$

$n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * n$

$n! = O(n^n)$; $n! = \Omega(2^n)$

$\lg(n!) = \sum_{i=1}^{n} \lg i$

$n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$ als n even is; $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n+1}{2}}$ als n oneven is

Dus $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$ als $n \geq 2$

En derhalve: $\lg(n!) \geq \frac{n}{2}(\lg n - 1)$

Formule van Stirling: $n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1 + \Theta(\frac{1}{n}))$

Stelling

1. $f = \Theta(g) \iff f = O(g)$ en $f = \Omega(g)$
2. $f = O(g) \iff g = \Omega(f)$

Stelling

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \alpha$ met $0 < \alpha < \infty \Longrightarrow f = \Theta(g)$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Longrightarrow f = O(g)$, maar $g \neq O(f)$

   (ofwel $f \neq \Omega(g)$)

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Longrightarrow f = \Omega(g)$, maar $f \neq O(g)$

In onderstaande tabel is te zien hoe snel enkele veel voorkomende functies toenemen als functie van n.

N	10	50	100	300	1000
$\log_2 N$	3	5	6	8	9
$5N$	50	250	500	1500	5000
$N \cdot \log_2 N$	33	282	665	2469	9966
N^2	100	2500	10 000	90 000	7 cijfers
N^3	1000	125000	7 cijfers	8 cijfers	10 cijfers
2^N	1024	16 cijfers	31 cijfers	91 cijfers	302 cijfers
$N!$	7 cijfers	65 cijfers	161 cijfers	623 cijfers	onvoorstelbaar
N^N	11 cijfers	85 cijfers	201 cijfers	744 cijfers	onvoorstelbaar

Vergelijk:

het aantal protonen in het heelal is een getal met 79 cijfers

het aantal microseconden sinds de oerknal is een getal met 24 cijfers

Polynomiaal: (meestal) binnen redelijke tijd klaar
Exponentieel: zeker niet in acceptabele tijd klaar

N	10	20	50	100	300
N^2	$\frac{1}{10000}$ sec	$\frac{1}{2500}$ sec	$\frac{1}{400}$ sec	$\frac{1}{100}$ sec	$\frac{9}{100}$ sec
N^5	$\frac{1}{10}$ sec	3,2 sec	5,2 min	2,8 uur	28,1 dag
2^N	$\frac{1}{1000}$ sec	1 sec	35,7 jaar	400 biljoen eeuwen	75 cijfers veel eeuwen
N^N	2,8 uur	3,3 biljoen jaar	70 cijfers veel eeuwen	185 cijfers veel eeuwen	728 cijfers veel eeuwen

executietijd tijd bij miljoen stappen per seconde

Vergelijk: de oerknal was ongeveer 15 miljard jaar geleden

Enige voorbeelden van recurrente betrekkingen.

1. $T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + n & n = 2^k > 1 \end{cases}$

   Oplossing: $T(n) = n + n \lg n = \Theta(n \lg n)$

2. $T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n & n > 1 \end{cases}$

   Dan geldt: $T(n) = O(n \lg n)$

Enige voorbeelden van recurrente betrekkingen.

3. $T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n-1) + 1 & n > 1 \end{cases}$

   Oplossing: $T(n) = n$

4. $T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ T(n-1) + n - 1 & n > 1 \end{cases}$

   Oplossing: $T(n) = 3 + \frac{1}{2}n(n-1)$

De volgende stelling geeft een verband aan tussen de hoogte van een binaire boom en het aantal knopen (resp. bladeren).

Stelling

Gegeven een binaire boom met n knopen (en b bladeren) en hoogte h. Dan geldt:

1. $h \geq \lceil \lg b \rceil$

2. $h \geq \lceil \lg(n+1) \rceil - 1 = \lfloor \lg n \rfloor$